Пакетиране на отсечки

Добромир Кралчев, Димчо Димов, Александър Пенев

Packings of segments: *this paper treats the problem for finding packings of segments, which has many practical applications such as timetables generating, processor time sharing, etc. The problem has two variants – a continuous one and a discrete one. The aim of the paper is theoretical: to study the properties of the set of the packings and to reduce the continuous case to the dicrete one, because it is easier to solve the last one. A solution of the discrete variant has recently been proposed in another paper of ours* [1].

Key words: *packing, segment, figure, closure, topology, order, binary matrix.*

I. Формулировка на задачата

Дадени са k отсечки с дължини $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Да се пакетират, т.е. да се разположат без припокриване (разрешава се външно допиране) върху друга отсечка с дължина λ_0 при допълнителни ограничения за възможното положение на всяка от малките отсечки.

Ако $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i > \lambda_0$, то задачата няма решение. Затова ще предполагаме, че $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \le \lambda_0$. Когато е изпълнено равенството, задачата се нарича *канонична*, а пакетирането – *плътно*.

Нека $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{$пакетиранията – решения на задачата $\mathcal{A}\}$. Без ограничение голямата отсечка е $[0;\ \lambda_0]$, а положението на i-тата отсечка е $[x_i;\ x_i + \lambda_i]$. Разположението на отсечките е наредена k-орка $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ от реални числа, т.е. $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{R}^k$. При това,

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ll} x_{i_1} - x_{i_2} \notin (-\lambda_{i_1}; \lambda_{i_2}) \text{ за } \forall i_1 \forall i_2 \in \{1,2,\dots,k\},\ i_1 \ne i_2 & (1) \\ x_i \in [0; \lambda_0 - \lambda_i] \text{ за } \forall i \in \{1,2,\dots,k\} & (2) \\ (x_1, x_2, \dots, x_k) \text{ удовлетворява допълнителните ограничения} & (3) \end{array} \right.$$

Този модел е подходящ за разнообразни задачи с практическо приложение. Например в системите с времеделение голямата отсечка съответства на интервала време, който трябва да бъде разпределен между няколко процеса, а малките отсечки изобразяват квантите време, предоставени на процесите. Пакетирането е плътно при стопроцентова заетост на процесора.

Друг пример е задачата за генериране на учебно разписание (с трудност NP – вж. [2]). Голямата отсечка съответства на времето, през което дадена учебна зала е заета, а малките отсечки представят уроците, провеждани в залата. Възможни са и други интерпретации.

II. Реална задача за пакетиране на отсечки

Ако условията (3) имат вида

$$x_i \in M_i \text{ за } \forall i \in \{1,2,\dots,k\} \qquad (3')$$

($M_1, \dots, M_k$ не зависят от $x_1, \dots, x_k$), задачата е с *разделени допълнителни ограничения*; т.е. тя е наредена $(2k+1)$-орка $\mathcal{Z} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k;\ M_1, \dots, M_k)$; а (2) и $(3')$ са равносилни на

$$x_i \in \lambda M_i \text{ за } \forall i \in \{1,2,\dots,k\}, \qquad (4)$$

където $\lambda M_i = M_i \cap [0; \lambda_0 - \lambda_i]$. Очевидно $\lambda M_1, \dots, \lambda M_k$ са ограничени. Ако $M_1, \dots, M_k$ са затворени, респ. са обединения на интервали, то и $\lambda M_1, \dots, \lambda M_k$ са такива съответно.

Теорема 1 (свойства на множеството от пакетирания):

1) $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ е ограничено множество за произволна задача $\mathcal{A}$ за пакетиране на отсечки.

2) Нека $\mathcal{Z} = \left(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k; M_1, \dots, M_k\right)$ е с разделени допълнителни ограничения.

а) Ако $M_1, M_2, \dots, M_k$ са затворени, то $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$ е затворено (компактно).

б) Ако $M_1, M_2, \dots, M_k$ са обединения на краен брой интервали, то $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$ е обединение на краен брой компоненти на свързаност, всяка от които е изпъкнал многостен. Две пакетирания са от една и съща компонента точно когато редът на отсечките е един и същ и x_i принадлежи на един и същ съставящ интервал на M_i за $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Доказателство: 1) От (2) следва, че $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \subseteq \prod_{i=1}^{k} \left[0; \lambda_0 - \lambda_i\right]$, т.е. $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ е ограничено.

2а) Според (1), (2) и (3') $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$ е сечение на затворени множества, значи е затворено.

2б) Ако две пакетирания са от една и съща компонента на свързаност, то те са краища на непрекъсната линия, лежаща в $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$; тази линия задава плавна трансформация на едното пакетиране в другото. При това движение не могат да настъпят скокообразни изменения като преминаването на x_i от един интервал на M_i в друг и променянето на реда на отсечките.

Обратно, нека $\mathcal{P}^*$ е (непразно) подмножество на $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$, определено от условията

$$\left|\begin{array}{l} x_{i_1} - x_{i_2} \le -\lambda_{i_1} \left(\text{или } x_{i_1} - x_{i_2} \ge \lambda_{i_2}\right) \text{ за } \forall i_1 \forall i_2 \in \{1, 2, \dots, k\},\ i_1 \ne i_2 \\ x_i \in \left[0; \lambda_0 - \lambda_i\right] \text{ за } \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \\ x_i \in I_i \text{ за } \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \end{array}\right.$$

(I_i е съставящ интервал на M_i). Тогава $\mathcal{P}^*$ е сечение на полупространства, т.е. изпъкнал многостен, оттам и свързано множество – компонента на свързаност на $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$. ■

За задачите $\mathcal{Z}' = \left(\lambda_0', \lambda_1', \dots, \lambda_k'; M_1', \dots, M_k'\right)$ и $\mathcal{Z}'' = \left(\lambda_0'', \lambda_1'', \dots, \lambda_k''; M_1'', \dots, M_k''\right)$ казваме, че $\mathcal{Z}'$ е *по-тясна* от $\mathcal{Z}''$ или че $\mathcal{Z}''$ е *по-широка* от $\mathcal{Z}'$, и пишем $\mathcal{Z}' \le \mathcal{Z}''$ или $\mathcal{Z}'' \ge \mathcal{Z}'$, ако $\lambda_1' \ge \lambda_1'', \dots, \lambda_k' \ge \lambda_k''$ и $\lambda M_1' \subseteq \lambda M_1'', \dots, \lambda M_k' \subseteq \lambda M_k''$.

Теорема 2 (теорема за монотонност): $\mathcal{Z}' \le \mathcal{Z}'' \Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Z}') \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{Z}'')$

Доказателство: $\mathcal{Z}' \le \mathcal{Z}'' \Rightarrow \left(-\lambda_{i_1}'; \lambda_{i_2}'\right) \supseteq \left(-\lambda_{i_1}''; \lambda_{i_2}''\right), \lambda M_i' \subseteq \lambda M_i'' \Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Z}') \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{Z}'')$ ■

Нека $(\mathcal{Z}^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ е безкрайна редица от задачи с разделени допълнителни ограничения, $\mathcal{Z}^{(n)} = \left(\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_k^{(n)}; M_1^{(n)}, \dots, M_k^{(n)}\right)$, и $\mathcal{Z} = \left(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k; M_1, \dots, M_k\right)$ е такава задача. Казваме, че $\mathcal{Z}$ е граница на $\mathcal{Z}^{(n)}$, и пишем $\mathcal{Z}^{(n)} \to \mathcal{Z}$ при $n \to \infty$ или $\lim_{n\to\infty} \mathcal{Z}^{(n)} = \mathcal{Z}$, ако $\lambda_1^{(n)} \to \lambda_1, \dots, \lambda_k^{(n)} \to \lambda_k$ и $\lambda M_1^{(n)} \to \lambda M_1, \dots, \lambda M_k^{(n)} \to \lambda M_k$ при $n \to \infty$.

<u>Заб.</u> $\lim_{n\to\infty} I_1^{(n)} \cup I_2^{(n)} \cup \dots \cup I_m^{(n)} \overset{def}{=} \left(\lim_{n\to\infty} I_1^{(n)}\right) \cup \left(\lim_{n\to\infty} I_2^{(n)}\right) \cup \dots \cup \left(\lim_{n\to\infty} I_m^{(n)}\right)$,

където $I_1^{(n)}, I_2^{(n)}, \dots, I_m^{(n)}$ са сегменти от $\mathbb{R}$; $\lim_{n\to\infty} \left[a_n; b_n\right] \overset{def}{=} \left[\lim_{n\to\infty} a_n; \lim_{n\to\infty} b_n\right]$.

Реална задача се нарича всяка задача от вида $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}} = \left(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k; M_1, M_2, ..., M_k\right)$, в която M_1, M_2, … , M_k са обединения на краен брой сегменти от $\mathbb{R}$.

Теорема 3: $\mathcal{P}(\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}^{(n)}) \neq \varnothing$ за $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}^{(n)} \Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}) \neq \varnothing$

Доказателство: Нека $x^{(n)} \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}^{(n)}), \forall n \in \mathbb{N}$. По теорема 1, т.2, всяка компонента на свързаност съответства на избор на неравенство в (1) и съставящ интервал в (3') (или в (4)). За нашата редица вариантите за избор са еднакви (краен брой). Затуй безброй задачи попадат в един вариант. Те образуват подредица $(\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}^{(n_k)})_{k=1}^{\infty}$. Без ограничение $\lambda M_i^{(n_k)} = [a_k; b_k]$. Редиците (a_k) и (b_k) са сходящи, значи ограничени. Тогава $(x^{(n_k)})_{k=1}^{\infty}$ е ограничена и има точка на сгъстяване $x^* \in \mathbb{R}$. След граничен преход в (1) и (4) следва, че $x^* \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}_{\mathbb{R}})$. ■

Следствие 1: Нека $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}} \leq \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}^{(n)}$ за $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}^{(n)} \to \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ при $n \to \infty$. Тогава е в сила следната еквивалентност: $\mathcal{P}(\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}) \neq \varnothing \Leftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}^{(n)}) \neq \varnothing, \forall n \in \mathbb{N}$.

Доказателство: Необходимостта следва от теорема 2, достатъчността – от теорема 3.■

За задачите $\mathcal{Z}' = \left(\lambda_0', \lambda_1', ..., \lambda_k'; M_1', ..., M_k'\right)$ и $\mathcal{Z}'' = \left(\lambda_0'', \lambda_1'', ..., \lambda_k''; M_1'', ..., M_k''\right)$ казваме, че $\mathcal{Z}'$ е *вътрешна за* (или *вложена в*) $\mathcal{Z}''$ или че $\mathcal{Z}''$ *обхваща* $\mathcal{Z}'$, и пишем $\mathcal{Z}' << \mathcal{Z}''$ или $\mathcal{Z}'' >> \mathcal{Z}'$, ако $\lambda_i' > \lambda_i''$ и $\lambda M_i' \subseteq \operatorname{int} \lambda M_i''$ за $\forall i = 1, 2, ..., k$ (int означава вътрешност).

Очевидно '$\leq$' е нестрога наредба, '$<<$' е строга наредба и '$<<$' е подрелация на '$\leq$'.

Теорема 4 (теорема за вложеност): $\mathcal{Z}' << \mathcal{Z}'' \Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Z}') \subseteq \operatorname{int} \mathcal{P}(\mathcal{Z}'')$

Доказателство: $\left(x_1, ..., x_k\right) \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}') \Rightarrow x_i \in \lambda M_i' \subseteq \operatorname{int} \lambda M_i'' \Rightarrow \forall i = 1, ..., k \;\; \exists \delta_i > 0$: $\left(x_i - \delta_i; x_i + \delta_i\right) \subseteq \lambda M_i''$. За $\varepsilon_1 = \min\limits_i \left(\lambda_i' - \lambda_i''\right)$, $\varepsilon_2 = \min\limits_i \delta_i$, $\varepsilon = \min\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\right\}/2 > 0 \Rightarrow$ $\prod\limits_{i=1}^{k} \left(x_i - \varepsilon; x_i + \varepsilon\right) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{Z}'') \Rightarrow \left(x_1, ..., x_k\right) \in \operatorname{int} \mathcal{P}(\mathcal{Z}'')$, т.е. $\mathcal{P}(\mathcal{Z}') \subseteq \operatorname{int} \mathcal{P}(\mathcal{Z}'')$. ■

III. Преход от реална към рационална задача

В множеството $\mathbb{Q}$ се дефинират интервали, околности, вътрешност ($\operatorname{int}_{\mathbb{Q}}$), сходимост.

Рационален интервал наричаме сечението с $\mathbb{Q}$ на произволен реален интервал. *Интервал от* $\mathbb{Q}$ наричаме всеки рационален интервал с рационални краища.

За задачата $\mathcal{Z} = \left(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k; M_1, ..., M_k\right)$ казваме, че е *с изискване за рационално решение*, ако M_1, … , M_k (значи и λM_1, … , λM_k) са подмножества на $\mathbb{Q}$.

За всяка задача от вида $\mathcal{Z} = \left(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k; M_1, ..., M_k\right)$ дефинираме операции $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{q}\mathcal{Z} = \left(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k; M_1 \cap \mathbb{Q}, ..., M_k \cap \mathbb{Q}\right)$ и $\boldsymbol{r}\mathcal{Z} = \left(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k; \overline{M_1}, ..., \overline{M_k}\right)$, като $\overline{X}$ е затворената обвивка на X в $\mathbb{R}$. Очевидно $\boldsymbol{q}\mathcal{Z}$ е с изискване за рационално решение.

Нека $\mathcal{Z}' = \left(\lambda_0', \lambda_1', ..., \lambda_k'; M_1', ..., M_k'\right)$ и $\mathcal{Z}'' = \left(\lambda_0'', \lambda_1'', ..., \lambda_k''; M_1'', ..., M_k''\right)$ са задачи с изискване за рационално решение. Казваме, че $\mathcal{Z}'$ е *рационално вътрешна за* (или *рационално вложена в*) $\mathcal{Z}''$ или че $\mathcal{Z}''$ *рационално обхваща* $\mathcal{Z}'$, и пишем $\mathcal{Z}' <<_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}''$ или $\mathcal{Z}'' >>_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}'$, ако $\lambda_1' > \lambda_1''$, ... , $\lambda_k' > \lambda_k''$ и $\lambda M_1' \subseteq \operatorname{int}_{\mathbb{Q}} \lambda M_1''$, ... , $\lambda M_k' \subseteq \operatorname{int}_{\mathbb{Q}} \lambda M_k''$.

Очевидно '$<<_{\mathbb{Q}}$' е строга наредба и е подрелация на '$\leq$'.

За реалната задача $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}} = \left(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k; M_1, ..., M_k\right)$ казваме, че е *с рационално условие*, ако $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{Q}$ и съставящите интервали на $M_1, \ldots, M_k$ са с рационални краища.

Рационална задача се нарича всяка задача $\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}} = \left(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k; M_1, ..., M_k\right)$, за която $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{Q}$ и $M_1, \ldots, M_k$ са обединения на краен брой сегменти от $\mathbb{Q}$.

Всяка рационална задача е с рационално условие и с изискване за рационално решение. Ако $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ е реална задача с рационално условие, то $\boldsymbol{q}\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ е рационална задача. Ако $\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}$ е рационална, то $\boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}$ е реална задача с рационално условие. За всяка задача $\mathcal{Z}$ с рационално условие $\mathcal{P}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathbb{Q}^k$. Освен това: 1) $\boldsymbol{q}\mathcal{Z} \leq \mathcal{Z}$; 2) $\mathcal{Z} \leq \boldsymbol{r}\mathcal{Z}$; 3) $\mathcal{Z}' \leq \mathcal{Z}'' \Rightarrow \boldsymbol{q}\mathcal{Z}' \leq \boldsymbol{q}\mathcal{Z}''$; 4) $\mathcal{Z}' \leq \mathcal{Z}'' \Rightarrow \boldsymbol{r}\mathcal{Z}' \leq \boldsymbol{r}\mathcal{Z}''$; 5) $\mathcal{Z}' << \mathcal{Z}'' \Rightarrow \boldsymbol{q}\mathcal{Z}' <<_{\mathbb{Q}} \boldsymbol{q}\mathcal{Z}''$; 6) $\mathcal{Z}' <<_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}'' \Rightarrow \boldsymbol{r}\mathcal{Z}' << \boldsymbol{r}\mathcal{Z}''$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}^{(n)} = \mathcal{Z}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{q}\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}^{(n)} = \boldsymbol{q}\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)} = \mathcal{Z}_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)} = \boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}$; 9) $\boldsymbol{rq}\mathcal{Z}_{\mathbb{R}} = \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$; 10) $\boldsymbol{qr}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}$; 11) $\mathcal{P}(\boldsymbol{q}\mathcal{Z}) = \mathcal{P}(\mathcal{Z}) \cap \mathbb{Q}^k$; 12) $\mathcal{P}(\boldsymbol{r}\mathcal{Z}) = \overline{\mathcal{P}(\mathcal{Z})}$ (където $\overline{X}$ означава затворената обвивка на X в $\mathbb{R}^k$).

Теорема 5 (за $\mathbb{Q}$-вложеност): $\mathcal{Z}' <<_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}'' \Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Z}') \subseteq \operatorname{int}_{\mathbb{Q}} \mathcal{P}(\mathcal{Z}'')$

Доказателство: както при теорема 4 (доказателството остава в сила над $\mathbb{Q}$). ■

Теорема 6: $\mathcal{Z}$ е с разделени допълнителни ограничения, $\operatorname{int} \mathcal{P}(\mathcal{Z}) \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{P}(\boldsymbol{q}\mathcal{Z}) \neq \varnothing$

Доказателство: следва от свойство 11 и от това, че $\mathbb{Q}^k$ е гъсто в $\mathbb{R}^k$. ■

Следствие 2: Нека $(\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ е редица от рационални задачи, $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ е реална задача; $\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n+1)} <<_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)}$, $\boldsymbol{q}\mathcal{Z}_{\mathbb{R}} <<_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)}$ за $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)} \to \boldsymbol{q}\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ при $n \to \infty$. Тогава е в сила следната еквивалентност: $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ има решение $\Leftrightarrow$ $\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)}$ има решение за $\forall n \in \mathbb{N}$.

Доказателство: От свойствата на операциите $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ следва, че $\boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n+1)} << \boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)}$, $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}} = \boldsymbol{rq}\mathcal{Z}_{\mathbb{R}} << \boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)}$ за $\forall n \in \mathbb{N}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)} = \boldsymbol{rq}\mathcal{Z}_{\mathbb{R}} = \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$; $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}} \leq \boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)}$ за $\forall n \in \mathbb{N}$.

Необходимост: $\mathcal{P}(\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}) \neq \varnothing \overset{\text{Сл.1}}{\Rightarrow} \mathcal{P}(\boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)}) \neq \varnothing$ за $\forall n \in \mathbb{N}$. От $\boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n+1)} << \boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)} \overset{\text{T4}}{\Rightarrow}$

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n+1)}) \subseteq \operatorname{int} \mathcal{P}(\boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)}) \Rightarrow \operatorname{int} \mathcal{P}(\boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)}) \neq \varnothing \overset{\text{T6}}{\Rightarrow} \mathcal{P}(\boldsymbol{qr}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)}) = \mathcal{P}(\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)}) \neq \varnothing,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Достатъчност: $\mathcal{P}(\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)}) \neq \varnothing$, $\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)} \leq \boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)} \overset{\text{T2}}{\Rightarrow} \mathcal{P}(\boldsymbol{r}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}^{(n)}) \neq \varnothing, \forall n \in \mathbb{N} \overset{\text{Сл.1}}{\Rightarrow} \mathcal{P}(\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}) \neq \varnothing$ ■

IV. Преход от рационална към целочислена задача

За една реална или рационална задача $\mathcal{Z} = \left(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k; M_1, ..., M_k\right)$ казваме, че е *с целочислено условие*, ако $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{Z}$ и краищата на съставящите интервали на $M_1, \ldots, M_k$ са цели числа (тогава това важи и за $\lambda M_1, \ldots, \lambda M_k$).

Ако $\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}} = \left(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k; M_1, ..., M_k\right)$, то $\boldsymbol{z}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}} \overset{def}{=} \left(m\lambda_0, m\lambda_1, ..., m\lambda_k; mM_1, ..., mM_k\right)$, $m = \text{НОЗ}\{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k$; краищата на съставящите интервали на $M_1, \ldots, M_k\}$; $\boldsymbol{z}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}$ е с целочислено условие. При това, $\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}) \Leftrightarrow \left(mx_1, mx_2, ..., mx_k\right) \in \mathcal{P}(\boldsymbol{z}\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}})$.

За задачата $\mathcal{Z} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k ; M_1, ..., M_k)$ казваме, че е *с изискване за целочислено решение*, ако M_1, … , M_k (а значи и λM_1, … , λM_k) са подмножества на $\mathbb{Z}$.

За произволна задача от вида $\mathcal{Z} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k ; M_1, ..., M_k)$ дефинираме операция $\hat{z}$: $\hat{z}\mathcal{Z} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k ; M_1 \cap \mathbb{Z}, ..., M_k \cap \mathbb{Z})$. Тогава $\hat{z}\mathcal{Z}$ е с изискване за целочислено решение.

Целочислена (дискретна) задача за пакетиране на отсечки се нарича всяка задача $\mathcal{Z}_{\mathbb{Z}} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k ; M_1, ..., M_k)$, за която $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{Z}$, а $M_1, ..., M_k \subseteq \mathbb{Z}$.

Полагаме $z\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}} = \hat{z}\, z\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}$. Ясно е, че $z\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}}$ е целочислена задача.

Теорема 7: $\mathcal{Z}$ е с целочислено условие, $(x_1, ..., x_k) \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}) \Rightarrow ([x_1], ..., [x_k]) \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$

Доказателство: Нека $j_1, j_2, ..., j_k$ е единствената пермутация на индексите, за която $x_{j_1} > x_{j_2} > ... > x_{j_k}$. Поради симетрията в (1) е достатъчно $i_1 > i_2$ (тогава $x_{j_{i_1}} - x_{j_{i_2}} > 0$):

$$\left| \begin{array}{l} x_{j_{i_1}} - x_{j_{i_2}} \geq \lambda_{j_{i_2}} \text{ за } \forall i_1 \forall i_2 \in \{1, 2, ..., k\}, i_1 > i_2 \\ x_i \in \lambda M_i \text{ за } \forall i \in \{1, 2, ..., k\} \end{array} \right.$$

където $\mathcal{Z} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k ; M_1, ..., M_k)$.

От $x_{j_{i_1}} - x_{j_{i_2}} \geq \lambda_{j_{i_2}}$ следва $x_{j_{i_1}} \geq x_{j_{i_2}} + \lambda_{j_{i_2}} \geq [x_{j_{i_2}}] + \lambda_{j_{i_2}}$. Но $[x_{j_{i_2}}] + \lambda_{j_{i_2}}$ е цяло, значи $[x_{j_{i_1}}] \geq [x_{j_{i_2}}] + \lambda_{j_{i_2}}$, т.е. $[x_{j_{i_1}}] - [x_{j_{i_2}}] \geq \lambda_{j_{i_2}}$ за $\forall i_1 \forall i_2 \in \{1, 2, ..., k\}, i_1 > i_2$.

Понеже $x_i \in \lambda M_i$ и съставящите интервали на λM_i са с целочислени краища, то $[x_i] \in \lambda M_i$ за $\forall i \in \{1, 2, ..., k\}$. Следователно $([x_1], [x_2], ..., [x_k]) \in \mathcal{P}(\mathcal{Z})$. ■

Теорема 7 ни дава право да решаваме дискретната задача $\hat{z}\mathcal{Z}$ вместо $\mathcal{Z}$.

V. Канонизиране на дискретната задача

Нека $\mathcal{Z}'_{\mathbb{Z}} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k ; M_1, ..., M_k)$ е неканонична, т.е. $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i < \lambda_0$. Полагаме

$$m = \lambda_0 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i, \quad \Lambda = \{0; 1; ...; \lambda_0 - 1\}, \quad \mathcal{Z}''_{\mathbb{Z}} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k, \underbrace{1, ..., 1}_{m \text{ пъти}}; M_1, ..., M_k, \underbrace{\Lambda, ..., \Lambda}_{m \text{ пъти}}).$$

$\mathcal{Z}''_{\mathbb{Z}}$ е канонична и равносилна на $\mathcal{Z}'_{\mathbb{Z}}$: $(x_1, ..., x_k) \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}'_{\mathbb{Z}}) \Leftrightarrow (x_1, ..., x_{k+m}) \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}''_{\mathbb{Z}})$, където $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_{k+m}$ е произволна пермутация на $\Lambda \setminus \{x_1, ..., x_k\}$.

Литература

[1] Dimov D., Kralchev D., Penev A. Cliques, Packings of Segments and Binary Matrices. Serdica Mathematical Journal, BAS-IMI, 2006 (submitted)

[2] Cooper, T. B., Kingston, J. H. (1995). The Complexity of Timetable Construction Problems. http://www.cs.usyd.edu.au/~jeff/

Адреси на авторите:

Добромир Кралчев: УХТ – Пловдив, Стопански факултет; dobromir_kralchev@abv.bg
доц. д-р Димчо Димов, гл.ас. Александър Пенев: ПУ “Паисий Хилендарски”, ФМИ